第41講　なす角の攻め方

41　xy 平面上で 2 点を A(0, 2), B(0, 3) とし，t を正の実数とし x 軸上の点を P(t, 0) とする．∠APB＝θ とするとき，θ が最大となるような実数 t の値と，そのときの θ の余弦を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　なす角の攻め方

41　3 点を A(0, 1)，B($-2t$, $3t$)，C($-t$, $2t$) とする．$0<t<1$ のとき，∠BAC が最大となるような t の値，及びそのときの tan∠BAC の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$t=\frac{1}{3}$，tan∠BAC＝1　㋑　$t=\frac{1}{2}$，tan∠BAC＝2　㋒　$t=\frac{1}{6}$，tan∠BAC＝3

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第41講　なす角の攻め方

41　xy 平面上で2点を A(0, 2), B(0, 3) とし，t を正の実数とし x 軸上の点を P(t, 0) とする．∠APB＝θ とするとき，θ が最大となるような実数 t の値と，そのときの θ の余弦を求めよ．

【答】　$t=\sqrt{6}$，$\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

【解答】

原点Oに対し，∠APO＝α，∠BPO＝β とおくと $\tan\beta=\dfrac{3}{t}$，$\tan\alpha=\dfrac{2}{t}$ であり，$\theta=\beta-\alpha$ より

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{\dfrac{3}{t}-\dfrac{2}{t}}{1+\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{2}{t}}=\frac{1}{t+\dfrac{6}{t}}$$

ここで，$t>0$，$6t>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると

$$t+\frac{6}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\frac{6}{t}}=2\sqrt{6}$$

が成り立つ．等号は $t=\dfrac{6}{t}$ したがって $\boldsymbol{t=\sqrt{6}}$ のとき成立する．

よって

$$\tan\theta=\frac{1}{t+\dfrac{6}{t}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

より θ が最大になるときの余弦は $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{24}+1}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{6}}{5}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 41 講　なす角の攻め方

41　3 点を A(0, 1)，B$(-2t,\ 3t)$，C$(-t,\ 2t)$ とする．$0<t<1$ のとき，∠BAC が最大となるような t の値，及びそのときの tan∠BAC の値を求めよ．

【選択肢】

㋐　$t=\dfrac{1}{3}$，$\tan\angle BAC=1$　　㋑　$t=\dfrac{1}{2}$，$\tan\angle BAC=2$　　㋒　$t=\dfrac{1}{6}$，$\tan\angle BAC=3$

【答】　㋐

【解答】

$\overrightarrow{AB}=(-2t,\ 3t-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-t,\ 2t-1)$ であり，

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2t)(-t)+(3t-1)(2t-1)=8t^2-5t+1=8\left(t-\dfrac{5}{16}\right)^2+\dfrac{7}{32}>0$ より ∠BAC は鋭角である．よって ∠BAC が最大となるとき，tan∠BAC は最大となる．

ここで $\overrightarrow{AB}=(-2t,\ 3t-1)$ より $\tan\beta=\dfrac{3t-1}{-2t}$，$\overrightarrow{AC}=(-t,\ 2t-1)$ より $\tan\gamma=\dfrac{2t-1}{-t}$ とおくと，$0<t<1$ より $\dfrac{2t-1}{-t}-\dfrac{3t-1}{-2t}=\dfrac{1-t}{2t}>0$ であるので

$$\tan\angle BAC=\tan(\gamma-\beta)=\frac{\tan\gamma-\tan\beta}{1+\tan\gamma\tan\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{2t-1}{-t}-\dfrac{3t-1}{-2t}}{1+\dfrac{2t-1}{-t}\cdot\dfrac{3t-1}{-2t}}=\frac{-t^2+t}{8t^2-5t+1}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3t+1}{8t^2-5t+1}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\dfrac{8t^2-5t+1}{3t+1}}$$

$$=-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\dfrac{8}{3}t-\dfrac{23}{9}+\dfrac{32}{9(3t+1)}}=-\frac{1}{8}+\frac{9}{64}\cdot\frac{1}{3t+1+\dfrac{4}{3t+1}-\dfrac{31}{8}}$$

となる．

このとき $3t+1>0$，$\dfrac{4}{3t+1}>0$ であるので，相加平均・相乗平均の関係より

$$3t+1+\frac{4}{3t+1}\geqq 2\sqrt{(3t+1)\cdot\frac{4}{3t+1}}=4$$

が成り立つ．等号は $3t+1=\dfrac{4}{3t+1}$ よって $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{3}}$ のとき成立する．

このとき，tan∠BAC は最大値 $-\dfrac{1}{8}+\dfrac{9}{64}\cdot\dfrac{1}{4-\dfrac{31}{8}}=\mathbf{1}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。